

# 木グラフで表現できる距離空間とは何か

早水 桃子 総合研究大学院大学 統計科学専攻 博士後期課程 2 年

## Introduction

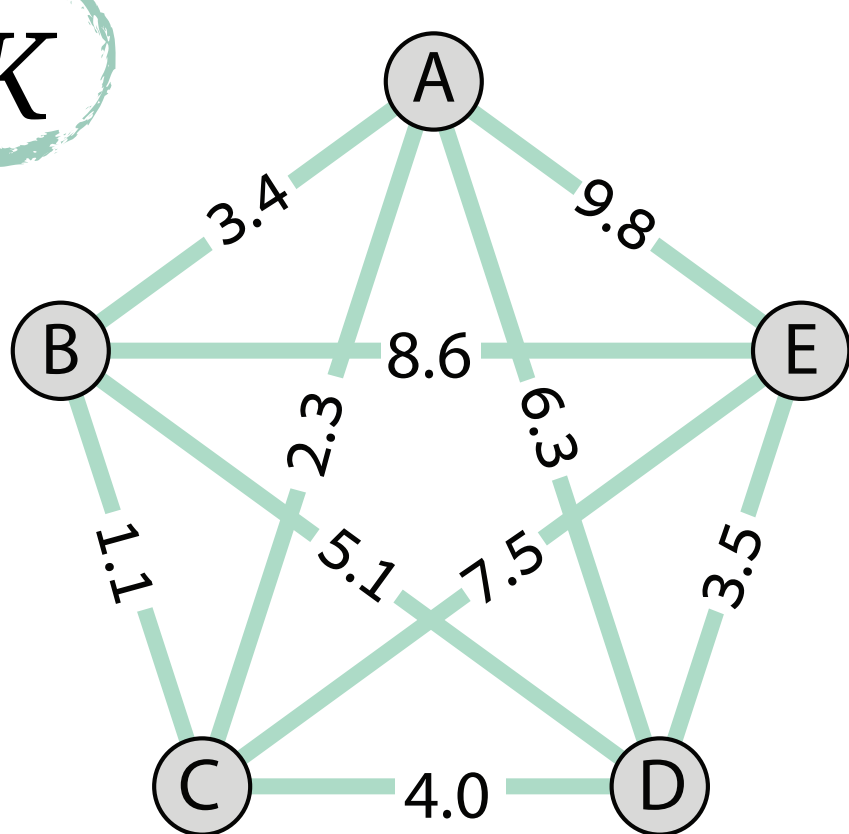
Q

都市の集合と, 各都市間の距離が与えられている. 同じ都市を複数回通らずに全都市を訪れるようなツアーの長さは最短でいくつか?

D

0	3.4	2.3	6.3	9.8
3.4	0	1.1	5.1	8.6
2.3	1.1	0	4.0	7.5
6.3	5.1	4.0	0	3.5
9.8	8.6	7.5	3.5	0

K

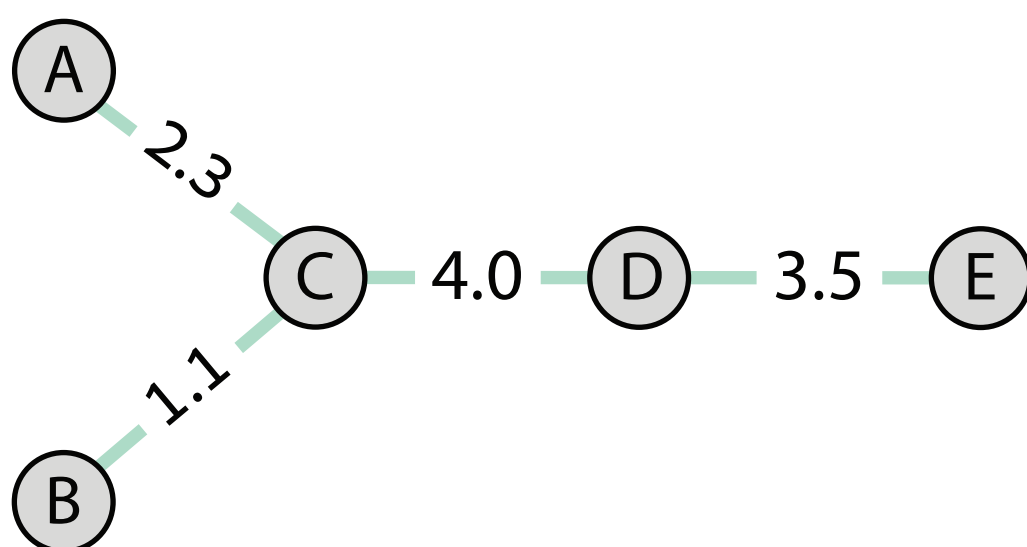


A

巡回セールスマン問題のメトリック版 (NP-hard). あらゆる入力に対する厳密解を求めるのは困難だが, この例に対しては, 実は簡単に計算できる.

T

集合  $X = \{A, B, C, D, E\}$  と距離  $d$  を変えずに距離空間  $(X, d)$  を表現する木  $T$  が存在する.



正解は  
21.8  
(木の長さの2倍)

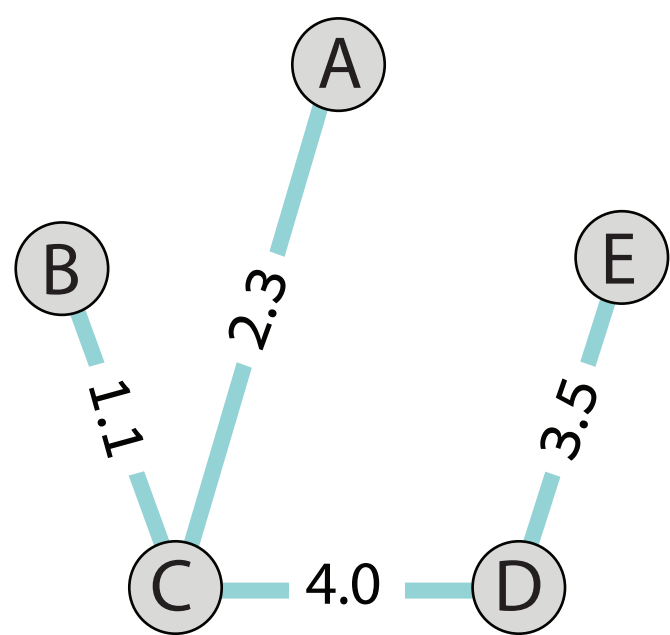
## Proposition

Q

距離空間  $(X, d)$  を導く木  $T$  は存在するなら, どんなグラフ?

A

完全グラフ  $K$  の中にあるただ一つの最小全域木!



## Notes

完全グラフには必ず最小全域木が存在するが, ユニークとは限らない.

## Fact

ただし, 次のルールを満たすときはユニーク.

## Tie - breaking rule

異なるペアは異なる距離  $d$  の値をとる

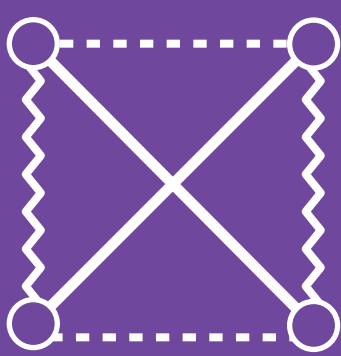
## Theorem

Q

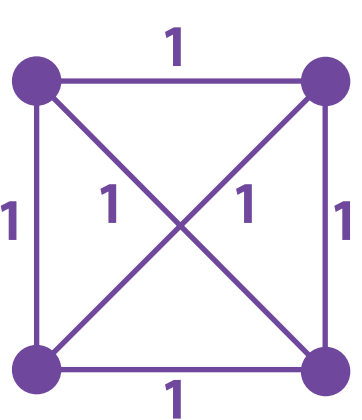
距離空間  $(X, d)$  はこのルールに従うとする. 木  $T$  が存在するための必要十分条件は?

## REMARK

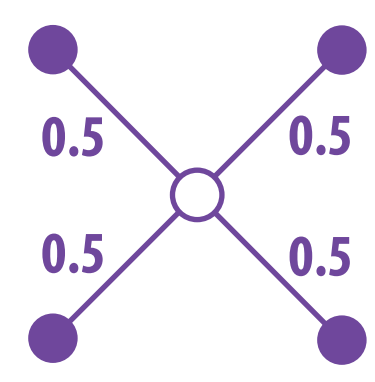
4 点条件 (four-point condition) では答えにならない



どのような 4 点を選んでも, { 実線の和, 波線の和, 点線の和 } のうち最小でないもの 2 つが等しくなる.



辺の長さがすべて等しい完全グラフは上の条件を明らかに満たしてしまう.

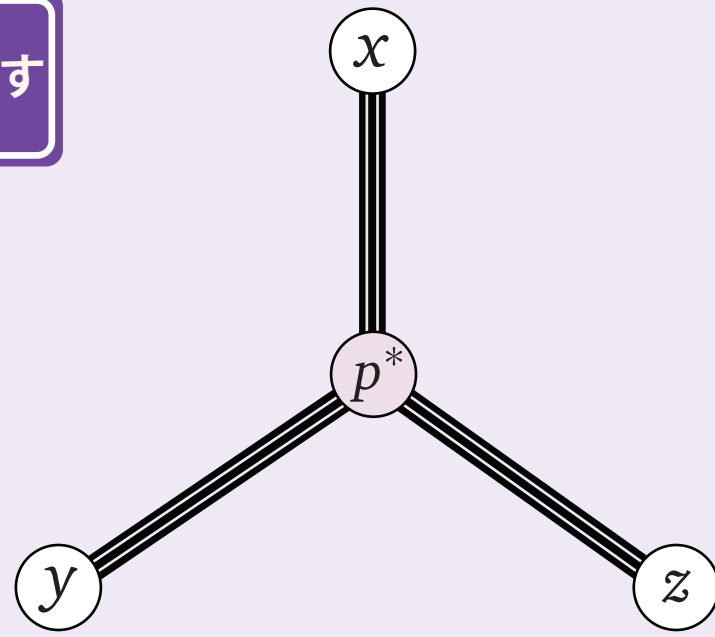


A

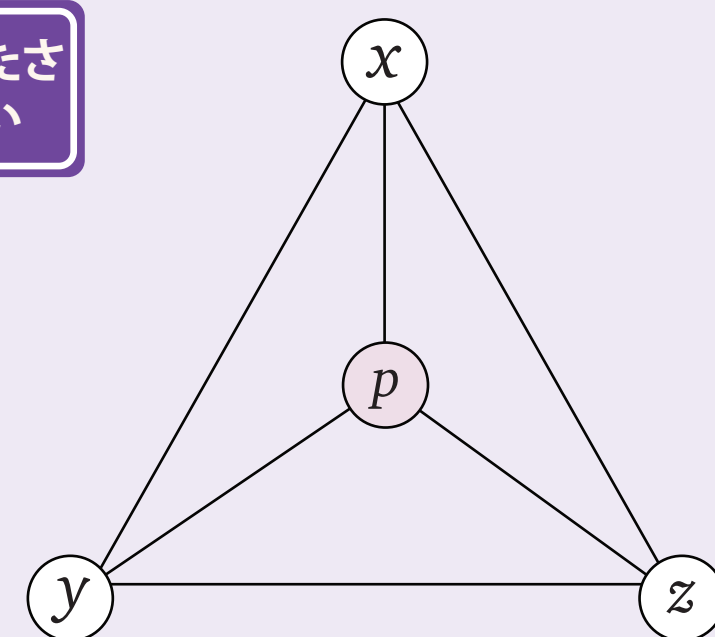
## The fourth point condition

どのような 3 点  $x, y, z \in X$  を選んでも, 次の等式を満たす 4 番目の点  $p^* \in X$  が存在する!  
$$d(x, p^*) + d(y, p^*) + d(z, p^*) = \frac{1}{2} \{d(x, y) + d(y, z) + d(z, x)\}.$$

みたす



みたさない



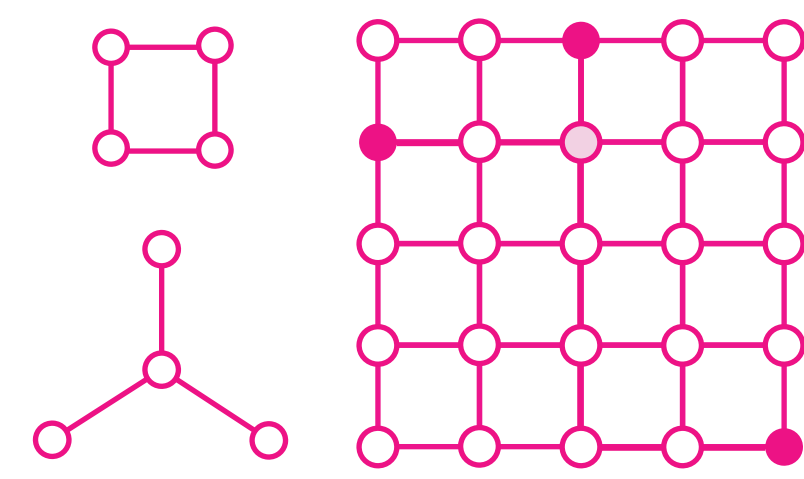
## Notes

点  $p^*$  は, 存在するなら自動的にユニーク.

## Corollary

The fourth point condition を満たすグラフは「メディアン・グラフ」と呼ばれることもある. これ自体は木やラティスなど色々なグラフを一括した総称だが, **有限個の頂点を持つメディアン・グラフのうち, tie-breaking rule を満たしうるものは木以外に存在しない** ということが明らかにされた.

## メディアン・グラフの例



## Preprint

M.Hayamizu and K.Fukumizu: On the Minimum Spanning Tree-like Metric Spaces. <http://arxiv.org/abs/1505.06145>